

2017年循人中学

数学比赛

高三理

日期：2017年6月17日（星期六）

时间：1:20p.m. - 3:20p.m. (120分钟)

主办：数学学会

出题：数学组



艾萨克·牛顿爵士 (1643 ~ 1727) 戈特弗里德·威廉·莱布尼茨 (1646 ~ 1716)
~ 微积分 ~

参赛须知：

1. 本卷共有 10 题选择题，10 题填充，全答。
选择题：用铅笔涂黑作答纸上正确的选项；
填充题：用蓝笔或黑笔填上答案。
2. 选择题一题 4 分，填充题分两组(一题 5 或 7 分)，满分为 100 分。
3. 答案和成绩在赛后公布在数学学会布告栏处（请自行查阅）。
若有疑问请向曾龙文师查询，之后一律以数学组公布的成绩为准。
4. 不必交回问题卷。
5. 高中可使用计算机。

未经正式宣布，不得翻看内页。

姓名：_____ () 班级：S3S()

选择题 (1-10, 每题 4 分, 共 40 分)

1、解 $\frac{x+4}{x+3} > 1$

- A 此题无解 B $x > -3$ C $x > -3, x > -4$ D $x \neq -3$

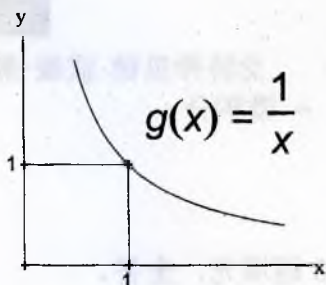
2、若方程 $4kx^2 + 4kx + x + k + 3 = 0$ 有等根, 求 k 。

- A 1 B 1/20 C 1/30 D 1/40

3、若甲每年年初都存入一笔款项到银行, 而每一年新的款项都是上一年的 $\frac{3}{2}$ 倍。已知甲一开始有 5000 元, 若不计利息, 问第 10 年年初他会有多少本金?

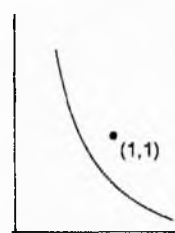
- A 566650.4 B 566640.5 C 566642.4 D 566630.6

4、已知函数图 $g(x) = \frac{1}{x}, x > 0$, 如图所示,

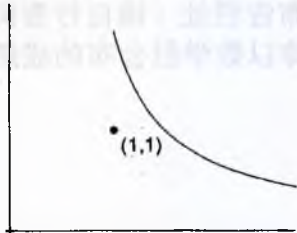


曲线 $g(x-0.5)$ 有可能是以下何者?

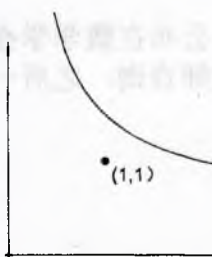
A



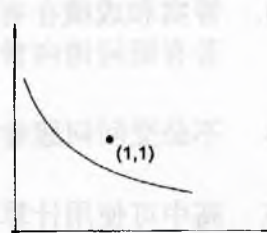
B



C



D



5、求二次曲线 $y = 2x^2 + 4x + 1$ 的顶点坐标。

- A (-2, 1) B (-1, -1) C (-3, 2) D (-2, -1)

6、若一抛射体的位移由方程 $H = -2t^2 + 9,000t - 400,000 \text{ m/s}$ 决定。求最大高度。

- A 9800000m B 9650000m C 9725000m D 98450000m

7、 (x, y, z) 满足方程 $\begin{cases} x + y = 2xy \\ y + z = 3yz \\ z + x = 7zx \end{cases}$ ，求 $x^2 + y^2 + z^2$

- A 25/16 B 121/169 C 144/169 D 169/144

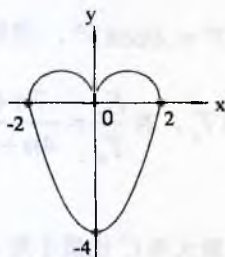
8、若 $x + y + z = 4$ ，且 (x, y, z) 为正数，求 xy^2z^3 的最大值。

- A $\frac{128}{9}$ B $\frac{256}{27}$ C $\frac{512}{81}$ D $\frac{1024}{243}$

9、已知 $f: \left[\frac{5}{4}, \infty\right) \rightarrow \left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right]$ 且 $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{4x+9}$ ，求 $f^{-1}(-2)$ 。

- A 0 B 4 C -2 D 无意义

10、以下心形图是由三个函数图所组成，它最有可能是哪三个函数？



- A $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ 的上半部} \\ (x+1)^2 + y^2 = 1 \text{ 的上半部} \\ y = (x-2)(x+2), x \in [-2, 2] \end{cases}$ B $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ 的上半部} \\ x^2 + y^2 = 1 \text{ 的上半部} \\ y = x^2 - 2, x \in [-2, 2] \end{cases}$

- C $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \text{ 的上半部} \\ (x+1)^2 + y^2 = 1 \text{ 的上半部} \\ y = (2-x)(x+2), x \in [-2, 2] \end{cases}$ D $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ 的上半部} \\ (x+1)^2 + y^2 = 1 \text{ 的上半部} \\ y = x^2 - 4, x \in [-2, 2] \end{cases}$

填空题 (11-15, 每题 5 分, 共 25 分)

11、若 (x, y) 满足方程 $2y^2 - 8y - 9x + 35 = 0$, 求 $\frac{y-5}{x+3}$ 的最大值。

12、若 α, β 是方程 $x^2 - (3 + 2\sqrt{\log_2 3} - 3\sqrt{\log_3 2})x - 2(3^{\log_3 2} - 2^{\log_2 3}) = 0$ 的解, 求 $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ 。

13、求 2017^{141} 被 71 除的余数。

14、已知三点 $A(a+2, b), B(b, 2a), C(1-2a, b+2)$ 且 B 内分 AC 成 2: 3, 求 a 。

15、函数 $y = 2^{2x} - 3(2^x) + 3$ 在 $x = a$ 时有最小值 $y = b$, 求 $a + b$ (近似至小数后 2 位)。

填空题 (16-20, 每题 7 分, 共 35 分)

16、方程 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{156}$ 有多少个正整数解? (例如 (152, 12324) 为其中一组解, 而 (12324, 152)

视作另一组解)

17、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{x - \sin x} = ?$

18、已知 $\cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 50^\circ = A \cos 5^\circ$, 求常数 A , 并以根式表示。

19、两个等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的首 n 项和为 S_n 与 T_n , 若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+1}{4n+25}$, 且 $a_{10} = 134$, 求 b_{101} 。

20、在三角形 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 成等差数列, 最大角 C 比最小角 A 大 $\frac{\pi}{2}$, 求 $\sin A \sin C - \sin^2 B$ 。