2017 年循人中学

数学比赛

高二理

日期：**2017** 年 **6** 月 **17** 日（星期六）

时间：**1:20p.m. – 3:20p.m. (120** 分钟**)**

主办 ： 数学学会

出题 ： 数学组

约翰·伯努利（**1667 ~ 1748** ）

~ 洛必达法则 ~

参赛须知：

1. 本卷共有 10 题选择题，10 题填充，全答。
   选择题：用铅笔涂黑作答纸上正确的选项；
   填充题：用蓝笔或黑笔填上答案。

2. 选择题一题 4 分，填充题分两组(一题 5 或 7 分)，满分为 100 分。

3. 答案和成绩在赛后会公布在数学学会布告栏处（请自行查阅）。
   若有疑问请向曾龙文师查询，之后一律以数学组公布的成绩为准。

4. 不必交回问题卷。

5. 高中可使用计算机。

未经正式宣布，不得翻看内页。

姓名：____________________ (   ) 班级：S2S(   )

选择题（1–10，每题 4 分，共 40 分）：

1. 直线 $y=2x+c$ 与圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 相切，求 $(c-2)^2$ 的值。
   $A.$ 3　　$B.$ 5　　$C.$ 7　　$D.$ 20

2. 一飞行器“天行者”号以时速 560 海里绕地球赤道 7 圈，问它的行程用了多少天？
   $A.\ 9\frac{1}{2}$　　$B.\ 10\frac{2}{3}$　　$C.\ 11\frac{1}{4}$　　$D.\ 12\frac{3}{4}$

3. 已知 $\tan 50°+\cot 50°=2\sec A$，$A$ 是一锐角，求 $\sin 3A$ 的值。
   $A.$ 0.866　　$B.$ 0.5　　$C.$ −0.7071　　$D.$ 1

4. 三项式 $(a+b+c)^6$ 的展开式中有多少项？
   $A.$ 28　　$B.$ 24　　$C.$ 18　　$D.$ 12

5. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & b\end{pmatrix}$ 满足方程 $A^2-3A-2\mathrm{I}=\mathrm{O}$，求 A^{-1} 的行列式。
   $A.\ -2$　　$B.\ \frac{1}{4}$　　$C.\ \frac{1}{2}$　　$D.\ -\frac{1}{2}$

6. 将“Hello Good Day”重新排序，问出现“God”或“GoD”的排列有多少个？
   $A.\ \dfrac{10!}{3!2!}$　　$B.\ \dfrac{10!}{3!}$　　$C.\ \dfrac{10!}{2!^2}$　　$D.\ \dfrac{10!}{2!}$

7. ${}^{n}C_0+{}^{n+1}C_1+{}^{n+2}C_2+{}^{n+3}C_3+\ldots+{}^{n+20}C_{20}=$ ________。
   $A.\ {}^{n+21}C_{20}-n$　　$B.\ {}^{n+20}C_{21}$　　$C.\ {}^{n+21}C_{20}$　　$D.\ {}^{n+21}C_{21}$

8. 在下图中，长方体 $ABCDEFGH$ 的长宽高满足关系：$h=1, b=4, w=\sqrt{2}$，问斜面 HAC 与底面 $ABCD$ 的夹角为______。

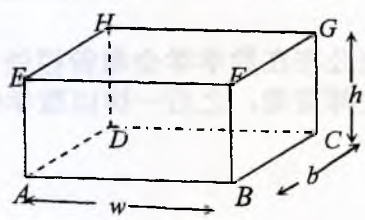

图 1

   $A.\ 60°$　　$B.\ 53°8'$　　$C.\ 45°$　　$D.\ 36°52'$

9. 一等边三角形的三个顶点为 $O(0,0)$、$A(9, a)$ 和 $B(3, b)$，其中 a 和 b 皆正，则其内切圆的圆心是
   $A.\ (4, 2\sqrt{3})$　　$B.\ (4, 2)$　　$C.\ (4, 3\sqrt{3})$　　$D.\ (4, 3)$

10. 在集合 $S=\{(x,y)\,|x,\ y$ 为大于等于 1，小于等于 6 的整数$\}$上，定义点$(x,y)\in S$为

"亮点"，当 x 和 y 皆为 6 的因数；

"灰点"，当仅有一坐标为 6 之因数；

否则，归类为"暗点"。

问，随机的从集合 S 中抽取一点，它并非"亮点"的概率是多少？

A. $\frac{1}{9}$　　*B.* $\frac{4}{9}$　　*C.* $\frac{5}{9}$　　*D.* $\frac{8}{9}$

填空题（11−15，每题 5 分，共 25 分）：

11. $\begin{vmatrix} (a+b)(a+c) & a^{-1} & bc \\ (b+c)(b+a) & b^{-1} & ca \\ (c+a)(c+b) & c^{-1} & ab \end{vmatrix}=$______。

12. 已知 a^{-1},b^{-1},c^{-1} 为等差数列的连续三项，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-b}$ 的数值是______。

13. 若排列数 ${}^{n}P_{r}$ 至少为组合数 ${}^{n}C_{r}$ 的 2017 倍大，则 r 的最小值是_______。

14. 若 $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{2p^3}+\frac{1}{6p^3}$，则 $p=$______。

15. 已知，$(2+\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+(3+\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$，其中 a、b、c、d 全都是整数。问 $a+b+c+d$ 的值是_______。

填空题（16−20，每题 7 分，共 35 分）：

16. 一等边三角形 ABC 的边长为 a cm。现在，它的一边 AB 被延长至 $AD=(a+x)$ cm，而另一边 AC，则被缩短至 $AE=(a-y)$ cm，以变形成同面积大小的一直角三角形。问 $x:y$ 的比值。

17. 下图显示有一 6 个单位长的线段 PQ，若端点 P 只能在第一象限绕定点 T 旋转，其中 $PT:TQ=5:1$，求线段 PT 所扫过的面积大小。（近似 至小数后两位）

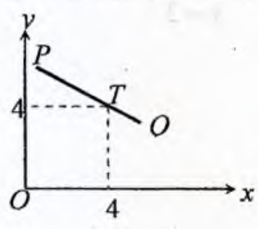

图 2

18. 矩阵乘积，$\begin{pmatrix}1&2&3\\a&b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$亦可写成$\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}2\\b\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}3\\c\end{pmatrix}z$，求以下恒等式

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a&bc\\1&b&ca\\1&c&ab\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}A+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}B+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}C,$$

中的三个矩阵A、B、C之和。

19. 甲同学展开$\dfrac{x^4+1}{x(1+x^2)}$至x^5项，然后代$x=2-\sqrt{3}$入展开式算得某数。接着他将$\dfrac{x^4+1}{x(1+x^2)}$整理变形为代数式$x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x+\frac{1}{x}}$后又代入$x=2-\sqrt{3}$，再次算得另一个数。此时，甲发现可以利用这两个数的近似关系计算$\sqrt{3}$的近似值$\dfrac{a}{b}$。请你求出$a+b$。

20. 某日，露露计算合成函数时发现到函数$f:x\to\dfrac{ax+b}{cx+d}$与矩阵$F=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$之间存在某种对应，例如：$f(x)=x=\dfrac{1x+0}{0x+1}$可与矩阵$F=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$或$F=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$相对应；抑或$f(x)=\dfrac{2x-1}{3x-1}$的系数对应矩阵$F=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-1\end{pmatrix}$；惊人的是，他还发现合成函数$f(f(x))=\dfrac{x-1}{3x-2}$的系数与矩阵相乘$F^2=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}$的数值竟然一致；他继续进行计算，$f(f(f(x)))=x$，而$F^3=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$仍然存在对应关系…
最后，露露大胆地猜想：

合成函数 $f^k(x)=\dfrac{a_kx+b_k}{c_kx+d_k}$的四个系数为矩阵$F^k$的相应位置上之元素。

应用此猜想，试求出函数$f:x\to\dfrac{x-7}{x-3}$，$x\neq3$的合成函数f^{2017}。